

$A \in K^{n \times n}$  είναι διαγωνίσιμος  $\Leftrightarrow$  είναι όμοιος με διαγώνιο 23/3/17

$A$  διαγωνίσιμος  $\Leftrightarrow$  υπάρχει βάση του  $K^{n \times 1}$  που αποτελείται από ιδιο-  
διανύσματα

$A$  διαγωνίσιμος  $\Leftrightarrow$  i)  $\chi_A(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} (x - \lambda_2)^{n_2} \dots (x - \lambda_s)^{n_s}$

ii)  $\dim V(\lambda_i) = n_i$

γεωμετρική πολλαπλότητα = αλγεβρική πολλαπλότητα του  $\lambda_i$

►  $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in K[x]$

$T: V \rightarrow V$  γραμμική απεικόνιση

$$T^2 = T \circ T$$

$$T^3 = T \circ T \circ T = T \circ T^2 \text{ γραμμική απεικόνιση}$$

$$T^n = T \circ T^{n-1}$$

$f(T) = a_0 I_V + a_1 T + a_2 T^2 + \dots + a_n T^n$

πολυώνυμο  $\swarrow$   $f(T)$   $\nwarrow$  γραμμική απεικόνιση  $\nwarrow$  γραμμική απεικόνιση

$$A \in K^{m \times m}$$

$f(A) = a_0 I_m + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n$

πολυώνυμο  $\swarrow$   $f(A)$   $\nwarrow$  πίνακας  $\nwarrow$   $m \times m$  πίνακες  $\nwarrow$   $m \times m$  πίνακας

$$A = [T]_a^a$$

$$\begin{aligned} [f(T)]_a^a &= [a_0 I_v + a_1 T + \dots + a_n T^n]_a^a = \\ &= [a_0 I_v]_a^a + [a_1 T]_a^a + [a_2 T^2]_a^a + \dots + [a_n T^n]_a^a = \end{aligned}$$

$$\left( \begin{aligned} [f+g]_a^a &= [f]_a^a + [g]_a^a \\ [f \circ g]_a^a &= [f]_a^a [g]_a^a \end{aligned} \right)$$

$$= a_0 [I_v]_a^a + a_1 [T]_a^a + a_2 [T^2]_a^a + \dots + a_n [T^n]_a^a =$$

$$= a_0 I_m + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n = f(A)$$

Παράδειγμα:  $f(x) = 1 + x + 2x^2 - x^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

### Θεώρημα Cayley-Hamilton

Έστω  $A \in K^{n \times n}$  και  $\chi_A(x)$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$  τότε  $\chi_A(A) = O_{n \times n}$ .

### Θεώρημα Cayley-Hamilton

Έστω  $T: V \rightarrow V$  γραμμική απεικόνιση και  $\chi_T(x)$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της  $T$ , τότε ισχύει

$$\chi_T(T) = O_V$$

Παράδειγμα: Έστω  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   $\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix}$

$$= (1-x)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\chi_A(A) = A^2 - 2A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ορισμός: Ελάχιστο πολυώνυμο του  $A \in K^{n \times n}$  λέγεται ένα μονικό πολυώνυμο  $m_A(x)$  τέτοιο ώστε  $i)$   $m_A(A) = O$  και  $ii)$  το  $m_A(x)$  έχει το μικρότερο βαθμό από όλα τα πολυώνυμα  $f(x)$  για τα οποία ισχύει  $f(A) = O_{n \times n}$ .

Ορισμός: Ελάχιστο πολυώνυμο του  $T: V \rightarrow V$  λέγεται ένα μονικό πολυώνυμο  $m_T(x)$  τέτοιο ώστε i)  $m_T(T) = 0$  και ii) το  $m_T(x)$  έχει το μικρότερο βαθμό ανάμεσα στα πολυώνυμα  $f(x)$  για τα οποία ισχύει  $f(T) = 0$

Θεώρημα: Έστω  $A \in K^{n \times n}$  και  $m_A(x)$  ένα ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα  $A$ . Αν  $f(A) = 0_{n \times n}$  για κάποιο πολυώνυμο  $f(x)$  τότε  $m_A(x) \mid f(x)$

Απόδειξη:  $f(x) = q(x)m_A(x) + r(x)$   
 $r(x) = 0 \quad \vee \quad \deg(r(x)) < \deg(m_A(x))$

Έστω  $\deg(r(x)) < \deg(m_A(x))$

$$f(A) = q(A)m_A(A) + r(A)$$

$$0_{n \times n} = q(A) \cdot 0_{n \times n} + r(A)$$

$$r(A) = 0_{n \times n} \quad \text{και} \quad \deg(r(x)) < \deg(m_A(x))$$

Άζωνο! Άρα  $r(x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = q(x)m_A(x)$$

Πρόταση του Θεωρήματος Cayley-Hamilton:

$$m_A(x) \mid \chi_A(x)$$

Πρόταση: Το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα  $A$  είναι μοναδικό

Απόδειξη: Έστω  $m_{1A}(x)$  και  $m_{2A}(x)$  δύο ελάχιστα πολυώνυμα

$$\text{του } A. \quad m_{2A}(A) = 0_{n \times n} \xrightarrow{\text{Θεώρημα}} m_{1A}(x) \mid m_{2A}(x)$$

$$m_{1A}(A) = 0_{n \times n} \xrightarrow{\text{Θεώρημα}} m_{2A}(x) \mid m_{1A}(x)$$

$$m_{2A}(x) = g(x) m_{1A}(x)$$

$$m_{1A}(x) = h(x) m_{2A}(x)$$

$$\deg m_{2A}(x) = \deg(g(x)) + \deg(m_{1A}(x))$$

$$\deg m_{1A}(x) = \deg(h(x)) + \deg(m_{2A}(x))$$

$$\deg m_{2A}(x) = \deg(g(x)) + \deg(m_{1A}(x)) = \deg(g(x)) + \deg(h(x)) + \deg(m_{2A}(x))$$

$$\deg(g) + \deg(h) = 0$$

$$\deg(g) = 0 = \deg(h) \text{ άρα } g = c_1 \text{ και } h = c_2 \quad \left( \begin{array}{l} \text{Είναι} \\ \text{βασικοί} \\ \text{πολυώνυμοι} \end{array} \right)$$

$$m_{2A}(x) = c_1 m_{1A}(x)$$

μεγιστοβάθμιος  
βασικός

μεγιστοβάθμιος  
βασικός  $c_1 \mid \Rightarrow c_1 = 1$

$$\Rightarrow m_{2A}(x) = m_{1A}(x)$$

Θεώρημα: Έστω  $A \in K^{n \times n}$  τότε το ελάχιστο και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $A$  έχουν τις ίδιες ρίζες.

Απόδειξη: Έστω  $\lambda$  ρίζα του ελάχιστου πολυωνύμου  $\Rightarrow m_A(\lambda) = 0$

$$m_A(x) \mid \chi_A(x) \Rightarrow \chi_A(x) = h(x) m_A(x)$$

$$\chi_A(\lambda) = h(\lambda) \cancel{m_A(\lambda)} = 0$$

Έστω  $\lambda$  ρίζα του χαρακτηριστικού  $\Rightarrow \lambda$  ιδιοτιμή του πίνακα  $A$   
Υπάρχει  $X \in K^{n \times 1}$  με  $X \neq 0_{n \times 1}$  τέτοια ώστε  $AX = \lambda X$

$$\text{Έστω } m_A(s) = s^5 + a_{s-1}s^{s-1} + \dots + a_1s + a_0$$

$$m_A(A) = 0_{n \times n}$$

$$A^s + a_{s-1}A^{s-1} + \dots + a_1A + a_0I_n = 0_{n \times n}$$

$$0_{n \times n} X = (A^s + a_{s-1}A^{s-1} + \dots + a_1A + a_0I_n) X$$

$$0_{n \times 1} = A^s X + a_{s-1}A^{s-1}X + \dots + a_1AX + a_0I_n X$$

$$= \lambda^s X + \dots + a_2\lambda^2 X + a_1\lambda X + a_0 X$$

$$\left( \begin{aligned} A^2 X &= A \underbrace{AX} = A\lambda X = \lambda AX = \lambda\lambda X = \lambda^2 X \\ A^3 X &= \lambda^3 X \end{aligned} \right)$$

$$= (\lambda^s + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) X$$

$$X \neq 0_{n \times 1} \Rightarrow \lambda^s + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \Rightarrow m_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda \text{ ρίζα του ελάχιστου πολυωνύμου}$$

► Έστω ότι για τον πίνακα A ισχύει  $\chi_A(x) = -(x-1)(x-2)(x-3)$   
τότε  $m_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

$$\chi_B(x) = -(x-1)^2(x-2)$$

$$\text{Τότε } m_B(x) = (x-1)(x-2)$$

$$m_B(x) = (x-1)^2(x-2)$$

$$\text{Αν } (B-I_3)(B-2I_3) = 0_{3 \times 3} \text{ τότε } \Rightarrow m_B(x) = (x-1)(x-2)$$

$$\text{Αν } (B-I_3)(B-2I_3) \neq 0_{3 \times 3} \text{ τότε } \Rightarrow m_B(x) = (x-1)^2(x-2)$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(6)

Παράδειγμα:  $\chi_c(x) = (x-1)^3(x-2)^2(x+17)$

$$\begin{aligned} m_c(x) \mid \chi_c(x) \\ m_c(x) \in \left\{ \begin{array}{l} 1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3 \\ (x-2), (x-1)(x-2), (x-1)^2(x-2), (x-1)^3(x-2) \\ (x-2)^2, (x-1)(x-2)^2, (x-1)^2(x-2)^2, (x-1)^3(x-2)^2 \\ (x+17), (x-1)(x+17), (x-1)^2(x+17), (x-1)^3(x+17), (x-2)(x+17) \\ (x-1)(x-2)(x+17), (x-1)^2(x-2)(x+17), (x-1)^3(x-2)(x+17) \\ (x-2)^2(x+17), (x-1)(x-2)^2(x+17), (x-1)^2(x-2)^2(x+17) \\ (x-1)^3(x-2)^2(x+17) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Θεώρημα: Ο πίνακας  $A \in K^{n \times n}$  είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο του  $A$  είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων διαφορετικών μεταξύ τους.

$$m_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_s) \quad \lambda_i \text{ διαφορετικά}$$

Παράδειγμα:  $m_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$   $A, B, C, D, E, F$  πραγματικοί πίνακες

$$m_B(x) = (x^2+1)(x-7)$$

$$m_C(x) = (x-1)^2(x-3)$$

$$m_D(x) = x-7$$

$$m_E(x) = x^2-2$$

$$m_F(x) = (x-1)(x-2)(x^2+7)$$

A διαγωνίσιμος

B δεν είναι διαγωνίσιμος

C δεν είναι διαγωνίσιμος

D διαγωνίσιμος

E διαγωνίσιμος

F δεν είναι διαγ.

Ο  $E$  θα είναι διαγωνίσιμος πάνω στον  $\mathbb{R}$

Στο γύρω των μιγαδικών όλοι οι  $A, B, D, E, F$  είναι διαγωνίσιμοι εκτός από τον  $C$ .

Πυλλόμενος #2 Άσκηση 7:  $A, B \in K^{n \times n}$ . Δείξτε ότι  $AB$  και  $BA$  έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Λύση: Έστω  $\lambda$  ιδιοτιμή του  $AB$ .

1η περίπτωση:  $\lambda = 0 \Rightarrow \det(AB) = 0$

$$\Rightarrow \det A \det B = 0$$

$$\Rightarrow \det B \det A = 0$$

$$\Rightarrow \det(BA) = 0 \quad \lambda = 0 \quad \text{ιδιοτιμή του } BA.$$

2η περίπτωση:  $\lambda \neq 0$  ιδιοτιμή του  $AB \xRightarrow{\text{ορίως}}$

υπάρχει  $X \neq 0$ ,  $X \in K^{n \times 1}$  τέτοια ώστε  $ABX = \lambda X$   
 $BA(BX) = B(\lambda X)$   
 $(BA)(BX) = \lambda BX$

Ισχύει  $BX \neq 0_{n \times 1}$  (Έστω  $BX = 0_{n \times 1}$ )

$$ABX = A 0_{n \times 1} \Rightarrow \lambda X = 0_{n \times 1}$$

$$\lambda \neq 0, X = 0_{n \times 1} \quad \underline{\underline{\text{Άτοπο!}}}$$

$$BA(BX) = \lambda(BX) \Rightarrow \lambda \text{ ιδιοτιμή του } BA$$

$BX \neq 0_{n \times 1}$